BLOQUE I

ARGUMENTAS EL ESTUDIO DEL CÁLCULO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE SU EVOLUCIÓN, SUS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON HECHOS REALES

DESEMPEÑOS DEL ESTUDIANTE:

Reconoce el campo de estudio del cálculo diferencial, destacando su importancia en la solución de modelos matemáticos aplicados a situaciones cotidianas.

Relaciona los modelos matemáticos con su representación geométrica para determinar áreas y volúmenes en cualquier situación de su vida cotidiana.

OBJETOS DE APRENDIZAJE

- Evolución del cálculo

- Modelos matemáticos: un acercamiento a máximos y mínimos.

COMPETENCIAS GENERICAS A DESARROLLAR

- Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Elige y practica estilos de vida saludables.
- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

COMPETENCIAS DISIPLINARES A DESARROLLAR

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

- Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.

- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

INTRODUCCIÓN AL BLOQUE

En este bloque se presenta una breve historia del cálculo, podrás apreciar la importancia que ha tenido el desarrollo matemático en la evolución de la humanidad; además, tendrás la oportunidad de observar modelos matemáticos y analizar el comportamiento que permita optimizar los fenómenos.

ACTIVIDAD INTRODUCTORIA

I. Resuelve los siguientes ejercicios y preguntas, según tus conocimientos o lo que recuerdes, no busques la información dentro del libro que te permita contestar correctamente, mucho menos copies, ya que la información que se obtenga de tus respuestas es fundamental para el buen desarrollo del bloque.

II. Aplica los métodos algebraicos necesarios para efectuar lo que se te pide.

1. Desarrolla los siguientes productos:

$a)(5x+8)^2 =$

$b)(7x-9)(7x+9) =$

$c)(3x+8)(5x-2) =$

$d)(x+6)(x-4) =$

$e)(2x-3)^3 =$

$f)(x+4)(x^2-5x+6) =$

2. Factoriza las siguientes expresiones:

$a)(5xy+15x^2)=$

$b)3xa+3xm-5a-5m=$

$c)x^3-6x^2+5x=$

$d)(x+3)^4(2x-3)-3x^2(x+3)^5=$

$e)4x^2-81=$

$f)x^3-8y^3=$

3. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{(2x+1)(4x+9)-2(2x^2+9x+4)}{(2x+1)^2}$$

4. Desarrolla $\sqrt{(x+4)}+\sqrt{(x-5)}\;^{2}$ y simplifica

5. Racionaliza el denominador de $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$

6. Simplifica $\dfrac{(4x^{\frac{3}{7}}y^{-2})^{-4}}{(2^{-3}x^{-5}y^{\frac{4}{5}})^{-1}}=$

12. Transforma la siguiente función utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{(5x+3)^4}{(25x^2+30x+9)^7}}$$

13. Transforma la siguiente función cuadrática de su forma general a su forma estándar, halla el vértice de la parábola, también llamado mínimo de la función y realiza un bosquejo de la función:

$$f(x) = x^2 + 14x + 60$$

14. Usando identidades trigonométricas simplifica la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cot x} =$$

15. Gráfica la siguiente función implícita:

$$x^2 + y^2 = 16$$

III. Con la ayuda de tu docente identifica y escribe en las siguientes líneas tus áreas de oportunidad, es decir, aquellos temas que no recuerdas, no sabes o se te dificultan.

____

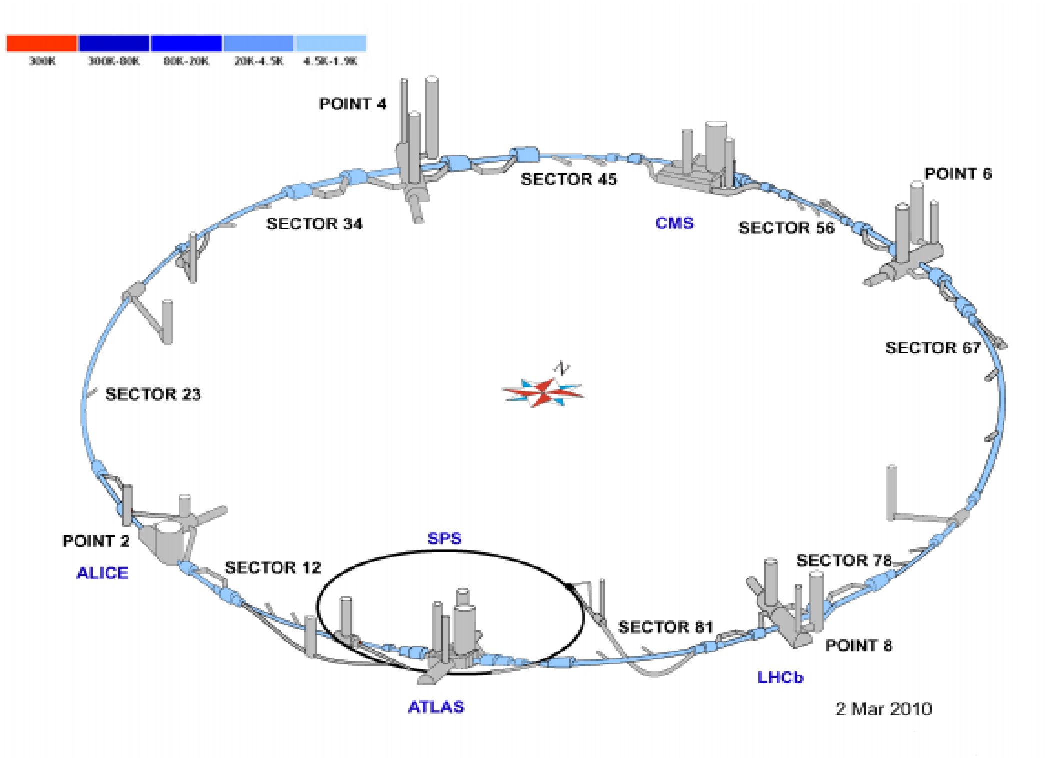
____

____

____

SECCIÓN CONOCE AL SER HUMANO DETRÁS DEL MATEMÁTICO

The Large Hadron Collider (LHC)



Nota: En este caso en vez de un matemático, se seleccionó una gran estructura creada por el hombre, con la finalidad de que conozcas esta impresionante obra de la ingeniería y el talento humano.

The Large Hadron Collider is the world's largest and highest-energy particle accelerator. It was built by the European Organization for Nuclear Research (CERN) from 1998 to 2008, with the aim of allowing physicists to test the predictions of different theories of particle physics andhigh-energy physics, and particularly for the existence of the hypothesized Higgs boson[1] and of the large family of new particles predicted bysupersymmetry.[2] The LHC is expected to address some of the most fundamental questions of physics, advancing the understanding of the deepest laws of nature. It contains six detectors each designed for specific kinds of exploration.

The LHC lies in a tunnel 27 kilometres (17 mi) in circumference, as deep as 175 metres (574 ft) beneath the Franco-Swiss border near Geneva, Switzerland. Its synchrotron is designed to collide opposing particle beams of either protons at up to 7 teraelectronvolts (7 TeV or 1.12 microjoules) per nucleon, or lead nuclei at an energy of 574 TeV (92.0 µJ) per nucleus (2.76 TeV per nucleon-pair).[3][4] It was built in collaboration with over 10,000 scientists and engineers from over 100 countries, as well as hundreds of universities and laboratories.[5]

On 10 September 2008, the proton beams were successfully circulated in the main ring of the LHC for the first time,[6] but 9 days later operations were halted due to a magnet quench incident resulting from an electrical fault. The following helium gas explosion damaged over 50superconducting magnets and their mountings, and contaminated the vacuum pipe.[7][8] On 20 November 2009 they were successfully circulated again,[9] with the first recorded proton–proton collisions occurring 3 days later at the injection energy of 450 GeV per beam.[10] On 30 March 2010, the first collisions took place between two 3.5 TeV beams, setting the current world record for the highest-energy man-made particle collisions,[11]and the LHC began its planned research program.

The LHC will operate at 4 TeV per beam until the end of 2012, 0.5 TeV higher than 2010 and 2011. It will then go into shutdown for 20 months for upgrades to allow full energy operation (7 TeV per beam), with reopening planned for late 2014.

(http://en.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider)

Interpreta el texto y contesta en español las siguientes preguntas; trata de que tu mensaje en cada respuesta sea claro:

1. ¿Qué es el gran colisionador de hadrones?

2. ¿En dónde fue construido?

3. ¿Cuáles son sus dimensiones?

4 ¿Cuál es la finalidad por la que fue creado el gran colisionador?

5 ¿Cuál es la longitud del colisionador?

6. ¿Cuántos detectores tiene el colisionador?

¿Sabias qué? Galileo Galilei dijo: Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo.

SITUACIÓN PROBLEMA

Contesta la siguiente pregunta:

¿Cómo obtiene la ciencia sus conocimientos? Realiza una investigación en alguna de las diversas ramas del conocimiento, y verifica cuáles son las aportaciones de la comunidad científica para lograr un avance significativo o un descubrimiento importante.

¿Sabias qué? Isócrates dijo: Las Matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la Filosofía.

EVOLUCIÓN DEL CÁLCULO

La palabra cálculo proviene del latín *calculus*, que significa piedra y su significado hace referencia a la acción de contar; en matemáticas utilizamos esta palabra para hacer mención al algoritmo que nos permite hallar las pendientes de las rectas tangentes asociadas a una curva y área bajo la curva.

La historia del cálculo inicia cuando el hombre tiene la necesidad de contar, así comienza una de las más maravillosas evoluciones dentro del saber matemático, la ciencia.

Durante los siglos V y IV a de C., en Grecia se comenzó a plantear problemas que implicaban la construcción de límites. Demócrito y otros pensadores intentaron responderlas combinando las matemáticas y la teoría filosófica atomicista, la cual se basa en la idea de que es posible dividir la materia hasta que se llegue a un límite en donde ya no es posible dividirla; de tal forma llegamos a sus átomos (indivisibles, homogéneos, incompresibles). Con base en estos mismos postulados filosóficos intentó resolver diversos problemas, incluso podemos afirmar que con este pensamiento filosófico matemático se dio a la primera concepción del método del límite. A partir de este momento el cálculo permaneció sin avances, quedaron muchos problemas matemáticos sin resolver, como la cuadratura del círculo, la duplicidad del cubo y la trisección de un ángulo, problemas clásicos de la matemática griega.

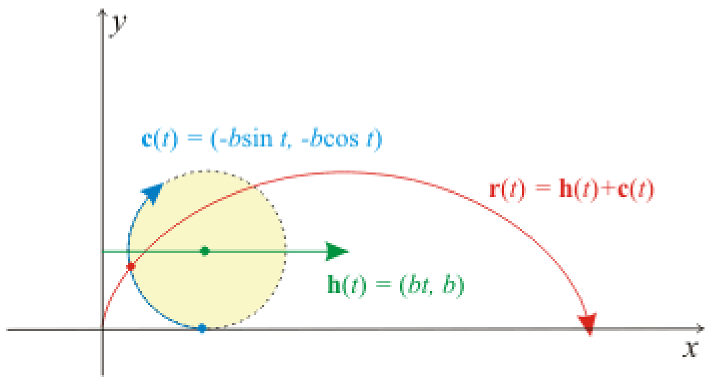
Es hasta 1609 que Kepler enuncia sus leyes:
Primera ley: Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos.
Segunda ley: El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.
Tercera ley: Los cuadrados de los periodos *P* de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores *a* de la elipse. $P^2 = ka^3$

Sin saberlo, Kepler estableció las bases del cálculo al desarrollar un sistema infinitesimal antecesor a éste, además, fomentó el uso de logaritmos.

¿Sabias qué? Bertrand Russell dijo: “Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura”.

La principal aportación de Descartes al cálculo se dio en 1637 con su intento de fusionar la antigua geometría con el álgebra. En colaboración con Pierre Fermat, inventó lo que hoy en día conocemos como la geometría analítica, que es donde se sientan las bases para el desarrollo del cálculo; también simplificó la notación algebraica. Pero, sin duda, una de sus aportaciones más notables es el eje coordenado *x* e *y*, el cual (según comentan como anécdota) desarrolló un día mientras descansaba en la cama, observando el vuelo de una mosca determinó que eran tres distancias las que definían su posición exacta tomando como referencia el piso, y dos de las paredes del cuarto que se hallaban perpendiculares entre sí.

En 1658, Pascal hizo una aportación muy concreta al cálculo: el estudio de la roulette o cicloide, que se define como la curva plana descrita por un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sobre una línea recta. Su descubrimiento fue registrado y descrito detalladamente en sus obras que fueron comunicadas a Huygliens, junto con muchos tratados de geometría que involucran algunos otros conceptos del cálculo. Los descubrimientos sobre la cicloide de Pascal constituyen el preludio del cálculo integral. Cabe hacer mención que los esfuerzos por resolver la cicloide surgen desde la época de los griegos, tal era el grado de su belleza y los esfuerzos realizados por encontrar una solución, que fue llamada la “Helena de la Geometría”, en recuerdo de la mujer de Menelao, por quien se decía: “se lanzaron al mar un millar de barcos.”



Otras de sus aportaciones matemáticas son: el triángulo de Pascal, también conocido como triángulo de Tartaglia, teoremas de geometría proyectiva, el hexágono místico de Pascal, la primera máquina digital de calcular, demostró la existencia del vacío, observó que la presión atmosférica disminuye con la altura, escribió las leyes de la presión, confirmando los experimentos de Torricelli, con Fermat fue fundador de la teoría de la probabilidad, abordó la definición y cálculo de la derivada e integral definida.

¿Sabias qué? Papus de Alejandría dijo: "Las abejas..., en virtud de una cierta intuición geométrica..., saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material.

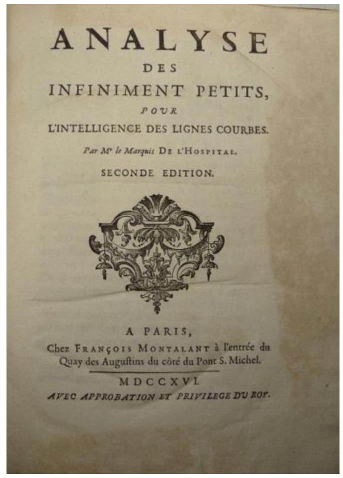
En 1665, Newton descubre el cálculo, generalizando los métodos que se habían utilizado para trazar líneas tangentes a curvas y para calcular el área encerrada bajo una curva, y determinó que los dos procedimientos eran operaciones inversas; en el otoño de 1666 los unió en lo que él llamó el método de las fluxiones; la invención de este método situó a las matemáticas modernas por encima del nivel de la geometría griega.

Simultáneamente Leibniz estableció la resolución de los problemas para los máximos y los mínimos, así como de las tangentes, en el cálculo diferencial; dentro del cálculo integral logró la resolución del problema para hallar la curva cuya subtangente es constante. Expuso los principios del cálculo infinitesimal, resolviendo el problema de la isócrona y de algunas otras aplicaciones mecánicas, utilizando ecuaciones diferenciales. No cabe duda que su mayor aportación fue el nombre de cálculo diferencial e integral, así como la invención de símbolos matemáticos para una explicación mejor del cálculo, como el signo = (igual), su notación para las derivadas *dx/dy* y su notación para las integrales "∫", ya que desde sus inicios su interés principal estuvo centrado en desarrollar un lenguaje simbólico para representar los conceptos fundamentales del pensamiento humano y las maneras de combinar estos símbolos para llegar a conceptos más elaborados.

Cabe hacer mención que existe un debate sobre quién es realmente el inventor del cálculo, Newton o Leibniz; sin las aportaciones de ambos no sería posible el avance de la ciencia y mucho menos existiría este libro de texto.

1696, L'Hôpital publica el primer libro de cálculo diferencial *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, en la introducción, su autor reconoce la deuda que tiene con Leibbniz, Jacob Bernoulli y Johann.

Bernoulli: “Estoy profundamente agradecido con la labor de Messieurs de Bernoulli, pero especialmente el del actual Profesor de Groningen. He utilizado libremente sus descubrimientos, así como las del Sr. Leibniz…”.



Uno de los grandes méritos de los Bernoulli fue comprender la importancia del descubrimiento del cálculo, con la resolución del problema de la curva isócrona en la cual se aplica *el nuevo cálculo* a partir de la deducción de su ecuación diferencial; con el descubrimiento de la propiedad de que algunas curvas derivadas geométrica u ópticamente de ella eran espirales logarítmicas también. Jacob resolvió el problema de la braquistócrona y también halló la línea de menor longitud que une dos puntos en un conoide parabólico. Una de las propiedades descubiertas por Jacobo Bernoulli sobre las curvas que se presentan como realizando un máximo o un mínimo es la de que la propiedad es: “común a la totalidad de la curva y a cualquiera de sus partes”.

¿Sabias qué? Platón dijo: “La geometría es una ciencia del conocimiento del ser, pero no de lo que está sujeto a la generación y a la muerte. La geometría es una ciencia de lo que siempre es.”

Por su parte, las aportaciones de Euler son el estudio de las líneas curvas con sus propiedades de máximos y mínimos; el estudio general de las funciones, en especial de las exponenciales, logarítmicas, trigonométricas; y de los desarrollos de serie y de productos infinitos. Estableció la relación entre las funciones exponenciales y las circulares con la intervención de una variable imaginaria. Realizó otras contribuciones destacadas en la notación matemática, tales como:

a) *f*(*x*) para referirse a la función *f* respecto a la variable independiente “*x*”.

b) La notación moderna de las funciones trigonométricas.

c) El uso de π (letra griega) para referirse al cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro.

d) La letra griega $\sum$ como símbolo de las sumatorias.

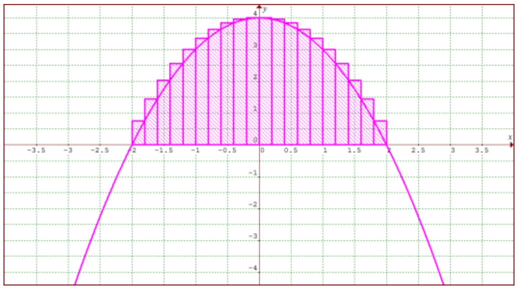
e) En el campo puro del cálculo, en 1728 introduce la letra *e* o número de Euler, como base del logaritmo natural o neperiano, número real cuyo valor se obtiene $e=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\approx 2.718281828$; dando a conocer que *e* y e^2 son irracionales.

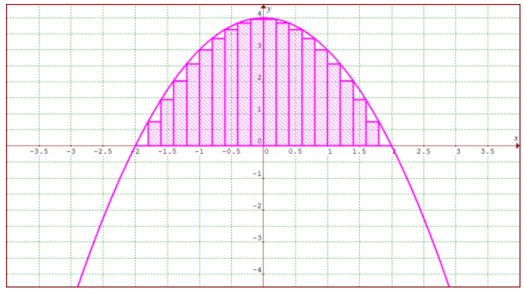
f) La letra i (latina) para hacer referencia a la unidad imaginaria.

Lagranje inicia en 1756 su *Mécanique analytique*, que significó para sus contemporáneos más que una referencia, una magnífica aplicación de las ecuaciones diferenciales en mecánica; en este libro, deduce toda la mecánica de sólidos y fluidos con la ayuda del cálculo diferencial.

Las grandes contribuciones de Gauss a las matemáticas van desde la más pura teoría de números hasta problemas de astronomía, magnetismo y topografía. Realizó grandes aportaciones en todas las ramas de las matemáticas en las que trabajó. En1799, Gauss demuestra el teorema fundamental del álgebra: “toda ecuación algebraica tiene una raíz real o compleja, con la consiguiente posibilidad de descomponer un polinomio en producto de factores simples”; otra de sus grandes aportaciones, su ecuación diferencial o también llamada ecuación de gauss
Gracias a Augustin Louis Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas: en1821 propicia la noción precisa de límite, los conceptos de función y de continuidad son actualizados, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan a partir de ese momento, rigor a los fundamentos del análisis, en especial al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir, curvas sin tangentes; retoma también el concepto tradicional de integral como suma y no como operación inversa. Además, introduce el rigor en el tratamiento de las series fijando criterios de convergencia y eliminando las series divergentes.

En1894, Riemann define la integral que lleva su nombre, ampliando la clase de funciones integrables a las funciones continuas salvo en un número numerable de discontinuidades, pero la relación entre derivación e integración deja de ser válida en los puntos de discontinuidad. Su método de integración de ecuaciones diferenciales es de gran relevancia, sobre todo por sus aplicaciones cotidianas, como la hidrodinámica. La limitación impuesta por Euclides en su geometría de un espacio tridimensional fue superada por Riemann al postular la existencia de espacios de N-dimensiones. A partir de los estudios de Riemann, Einstein pudo formular sus famosas ecuaciones de campo de la gravedad. La reflexión que se desprende de estas ecuaciones ha permitido explicar los movimientos de las estrellas y de las galaxias, los agujeros negros y el big bang.





Integración del área bajo la curva $f(x) = -x^2 + 4$, *en* $-2,2$ *, utilizando rectángulos superiores e inferiores.*

Como puedes observar muchos de los más importantes descubrimientos del hombre han sido propiciados por el trabajo de otros grandes investigadores.

¿Sabias qué? Sthepen Hawking dijo: “Dios no sólo juega a los dados, a veces los tira donde no se pueden ver.”

ACTIVIDAD

En equipos de cuatro integrantes realicen una amplia investigación bibliográfica y en Internet sobre los descubrimientos que permitieron el desarrollo de las matemáticas. Con la información elabora una línea del tiempo, constrúyela con folders de colores unidos en forma horizontal, en forma paralela en tu línea del tiempo, por un lado describe los acontecimientos que permitieron la evolución de las matemáticas desde la época de los griegos hasta la actualidad y en el otro describe los avances tecnológicos que han permitido la evolución de la humanidad en ese mismo periodo de tiempo. Puedes incluir imágenes, pero es muy importante que esté realizada a escala; es decir, los periodos deben estar divididos con una misma medida, por ejemplo un periodo de 100 años se puede representar con 20 cm.

Al finalizar su línea del tiempo, entréguenla al docente para su revisión, quien elegirá los cuatro mejores trabajos para que sean presentados en plenaria.

¿Sabias qué? Francis Bacon dijo: “En la matemática no encuentro ninguna imperfección, excepto quizá en el hecho de que los hombres no comprenden de manera suficiente el excelente uso de la Matemática Pura”.

SECCIÓN CUIDANDO EL PLANETA

¿BASURA: MALA EDUCACIÓN O PROBLEMA SOCIAL?

Día con día manifestamos que nuestro planeta está muy contaminado, la mayoría de las veces culpamos al gobierno que tiene la obligación de levantar o procesar la basura, o al vecino o a nuestros familiares que no limpian; pero somos muy pocos los que asumimos la responsabilidad. Por esta razón nuestra actividad tiene como finalidad hacer limpieza de nuestro alrededor, pero lo más importante es que formes parte de una reflexión en donde la sociedad sea educada al menos teóricamente y poder ver sus efectos a corto y mediano plazo.

Para ello:

Primer paso

Diseña una campaña para mantener limpia tu escuela.

Primero organícense en brigadas de limpieza (aproximadamente de 5 o 6 integrantes cada una), éstas tendrán los siguientes objetivos.

- Recoger única y exclusivamente la basura que encuentre tirada en la escuela (patios, salones, pasillos, etc.).

- Pesar toda la basura que se recogió durante el día.

- Escribir está información en una tabla que se llenará día con día.

- Efectuar una presentación power point que incluya fotos de cómo se ven las áreas escolares sucias, de los estudiantes recogiendo y pesando la basura. Presentarla a la comunidad escolar como una forma de reflexión, el mayor impacto de ésta será mostrarle su escuela sucia y toda la basura que es tirada y que le da mal aspecto y de las personas que la integran. Complementa tu presentación con una investigación de la contaminación por basura en tu localidad.

Segundo paso

- Iniciar una campaña que se puede llamar: “Mantén limpia tu escuela.”

Tercer paso

- Continuar estos trabajos repitiendo lo mismo en tu casa y comunidad en forma.

- Cada estudiante hará una presentación a su familia en la cual mostrará todo lo que se ha hecho en la escuela y a partir del estudio que se hizo en la localidad, cuáles son las acciones quer se deben realizar para evitar tener basura tirada o para no producir tanta basura (si es una casa o una colonia limpias y que no produzcan tanta basura, emitir una felicitación e indagar cómo lo lograron).

- Crea un sistema eficiente de limpieza y mantenimiento de tu escuela y aplícalo a tu casa.

Evalúa los efectos del trabajo realizado y compártelo con el grupo… no te desanimes si ves que tus resultados son adversos, continúa trabajando con entusiasmo.

¡Los grandes logros se realizan con perseverancia!

Puedes continuar este programa:

Diseñando una campaña para hacer uso racional de los recursos de limpieza y naturales (agua, papel higiénico, sanitarios).

¿Sabias qué? George Berkeley afirmó: “Aquel que sea capaz de digerir una segunda o tercera fluxión, una segunda o tercera diferencia, no necesita ser, creo yo, demasiado remilgado acerca de ninguna cuestión relativa a la Divinidad.”

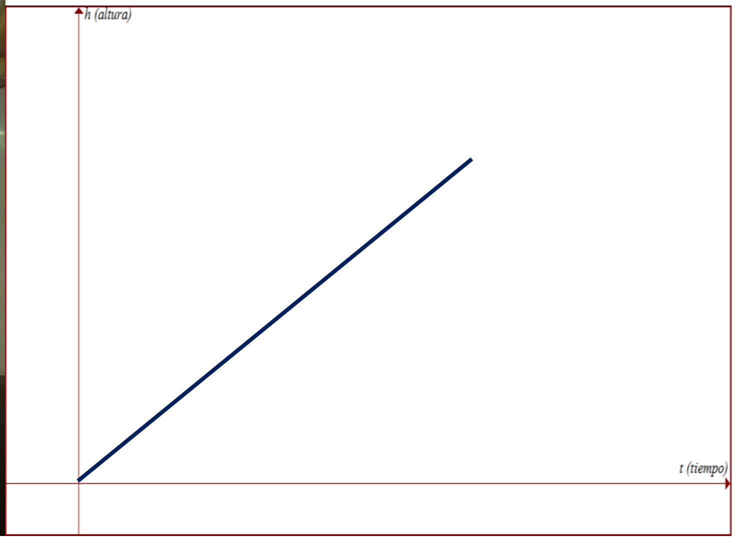
MODELOS MATEMÁTICOS

Un modelo matemático es la representación de un fenómeno en el lenguaje de las matemáticas.

Para poder entender los fenómenos que nos rodean y tratar de controlarlos en cierta medida, se construyen modelos matemáticos que explican su comportamiento y que nos ayudan además con la predicción de lo que ocurriría si modificáramos algunas de sus variables. Existen modelos matemáticos complejos tales como el que planteó Albert Einstein para predecir la órbita de Mercurio, hasta que posteriormente se logró comprobarla por medios físicos. Es posible comenzar a realizar modelos básicos con problemas sencillos.

Ejemplo:

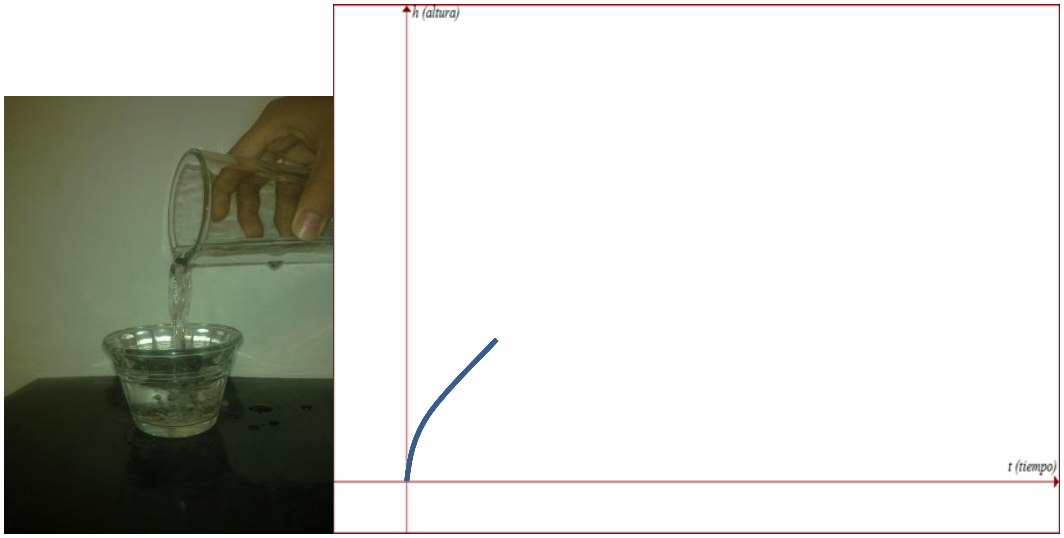
Construye la gráfica del llenado de un vaso (altura respecto al tiempo), cuya forma es cilíndrica como el de la foto, considera el gasto de agua constante (el gasto es la cantidad de volumen que ingresa al vaso en unidad de tiempo).



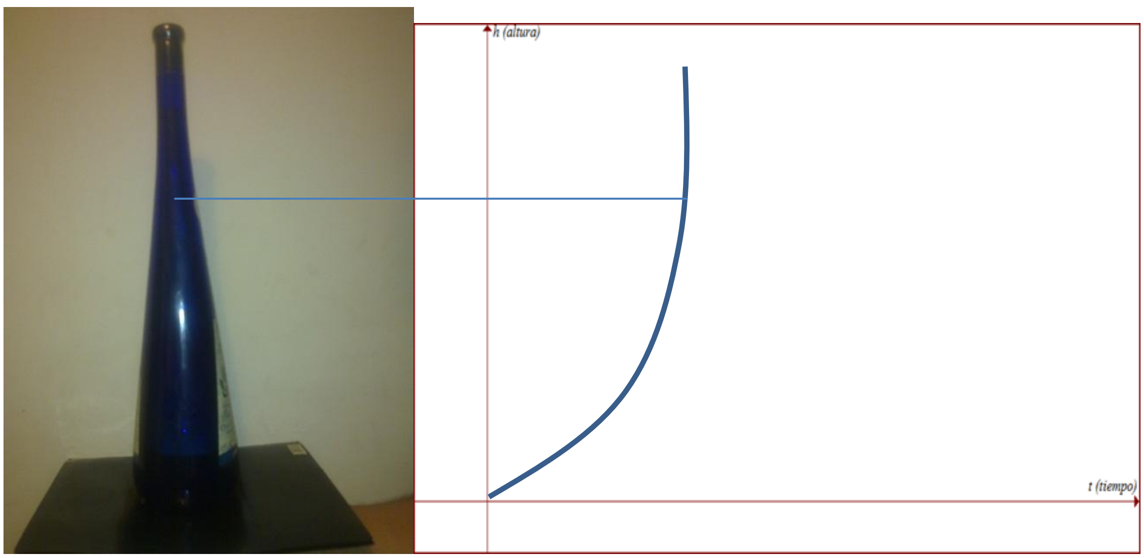
Como podrás observar, la altura aumenta en forma constante, por esa razón se representa con una línea recta, es decir, se va a llenar en forma uniforme.

Ejemplo:

Construye la gráfica del llenado de un recipiente (altura respecto al tiempo), cuya forma es la de la foto, considera el gasto de agua constante (el gasto es la cantidad de volumen que ingresa al vaso en unidad de tiempo).



Se observa que la curva se desvía un poco porque la velocidad de llenado es un poco más lenta que la del vaso anterior, debido a que la parte superior del recipiente es ancha.



Observa cómo va aumentando la velocidad de llenado poco a poco desde el inicio hasta la línea, a partir de ésta con la velocidad aumenta y en forma un tanto lineal por la uniformidad que se empieza a presentar en el modelo.

Actividad

En parejas representen por medio de modelos matemáticos (gráficas) el llenado de cada uno de los siguientes recipientes; comparen sus gráficas con las de otras parejas y, finalmente, en plenaria obtengan las gráficas correctas de cada uno:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.  

ANÁLISIS DE REGRESIÓN

Recta de los mínimos cuadrados

La forma de modelar que anteriormente se describió sólo permite relacionar un comportamiento gráfico que representa qué tan rápido se llena un recipiente debido a su forma. Otra manera de modelar es un ajuste de regresión lineal, el cual se basa en el conocimiento de distintos puntos obtenidos durante la observación del fenómeno, si se aproximan a una recta, se busca amoldar a una recta que en promedio se "ajuste" a los puntos y con un error determinado se pueda obtener información importante. El objetivo es obtener la recta con pendiente *m* y ordenada al origen *b* que mejor se ajuste.

La ecuación de la recta quedará representada por:

$y = mx + b$

En donde *m* y *b* se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$$m = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}} \qquad\qquad b = \frac{\sum y - m\sum x}{n}$$

Es necesario hacer un análisis de correlación (*r*) para verificar que el ajuste sea confiable y, por lo tanto, la información obtenida del fenómeno mediante este método también sea confiable. La ecuación para obtener el coeficiente de correlación (r), también llamado r de Pearson, es:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}\sqrt{\sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}}}$$

Así que la interpretación se realizará:

Si r = 1 o r = −1 entonces todos los puntos están sobre una recta (ésta sería una regresión ideal).
Si r = 0, los puntos no representan una tendencia lineal y no se puede construir un modelo matemático lineal.
Entre más cercanos estén los valores de r a 1 y −1 mas efectivo será el método.
Entre más cercanos a 0 el método no representa una regresión lineal.

En donde:

$n =$ Número de pares de datos

$\sum x =$ Sumatoria de los valores de x

$\sum y =$ Sumatoria de los valores de y

$\sum xy =$ Sumatoria del producto de los valores de x por los valores de y

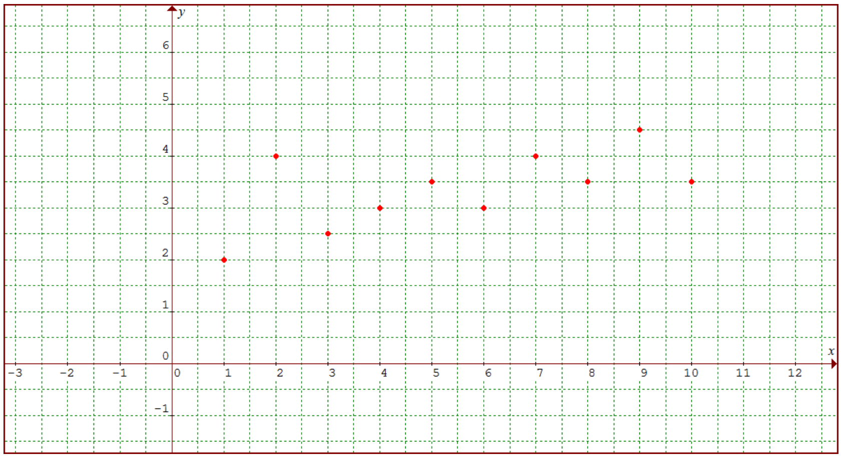
$\sum x^2 =$ Sumatoria de los valores de x elevados al cuadrado

$\sum y^2 =$ Sumatoria de los valores de y elevados al cuadrado

Ejemplo:
La siguiente tabla muestra las variaciones de la velocidad de una partícula (m/s), en el transcurso del tiempo (s) observado; obtén un modelo matemático que nos permita entender el comportamiento de dicha partícula, en donde y = velocidad de la partícula y x = tiempo. ¿Cuál será la velocidad de la partícula a los 4.5 segundos?:

x	y
1	2
2	4
3	2.5
4	3
5	3.5
6	3
7	4
8	3.5
9	4.5
10	3.5

Gráficamente la dispersión queda así:



Primero se realiza una tabla en donde se obtienen los elementos a usar en la fórmula:

x	y	xy	x^2	y^2
1	2	2	1	4
2	4	8	4	16
3	2.5	7.5	9	6.25
4	3	12	16	9
5	3.5	17.5	25	12.25
6	3	18	36	9
7	4	28	49	16
8	3.5	28	64	12.25
9	4.5	40.5	81	20.25
10	3.5	35	100	12.25
$\sum x = 55$	$\sum y = 33.5$	$\sum xy = 196.5$	$\sum x^2 = 385$	$\sum y^2 = 117.25$

$$m = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{\sum x^{\ 2}}{n}} = \frac{196.5 - \frac{(55)(33.5)}{10}}{385 - \frac{55^{\ 2}}{10}} = \frac{196.5 - \frac{1842.5}{10}}{385 - \frac{3025}{10}} = \frac{196.5 - 184.25}{385 - 302.5} = \frac{12.25}{82.5} = 0.1485$$

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{33.5 - \ 0.1485 \quad 55}{10} = \frac{33.5 - 8.1675}{10} = \frac{25.3325}{10} = 2.53325$$

$$\hat{y} = 0.1485x + 2.53325$$

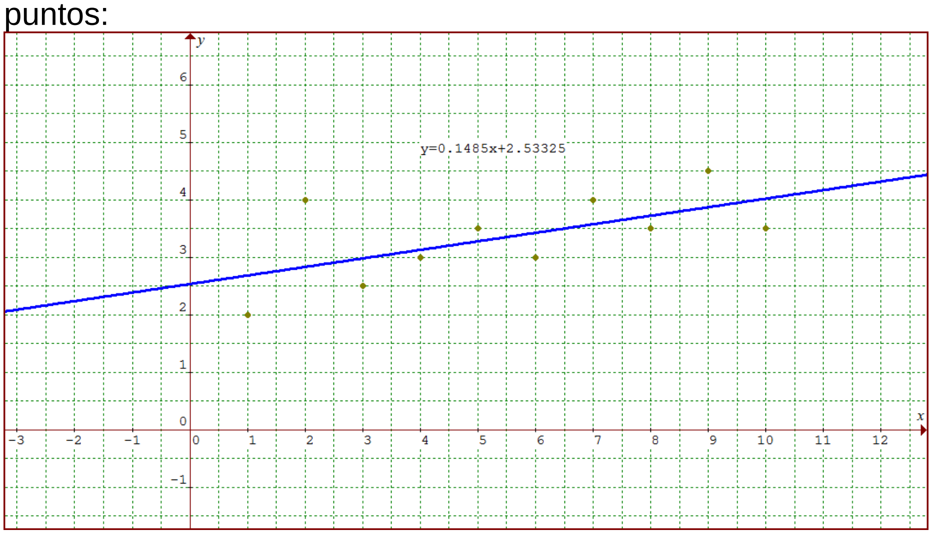
Análisis de correlación:

$$r=\frac{\sum xy-\frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n}}{\sqrt{\sum x^2-\frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}\sqrt{\sum y^2-\frac{\left(\sum y\right)^2}{n}}}=\frac{196.5-\frac{(55)(33.5)}{10}}{\sqrt{385-\frac{(55)^2}{10}}\sqrt{117.25-\frac{(33.5)^2}{10}}}=$$

$$=\frac{196.5-\frac{1842.5}{10}}{\sqrt{385-\frac{3025}{10}}\sqrt{117.25-\frac{1122.25}{10}}}=\frac{196.5-184.25}{\sqrt{385-302.5}\sqrt{117.25-112.225}}=$$

$$\frac{12.25}{\sqrt{82.5}\sqrt{5.025}}=\frac{12.25}{(9.0829)(2.2416)}=\frac{12.25}{20.36}=0.6016$$

La correlación es bastante aceptable por lo que la ecuación obtenida nos proporciona información sobre la velocidad de la partícula.
Observa cómo la gráfica de la recta obtenida pasa muy cerca de la mayoría de los puntos:



La ecuación encontrada es: $\hat{y}=0.1485x+2.53325$ con una correlación de r = 0.6016.

La velocidad de la partícula a los 4.5 segundos es:

$$\hat{y}=0.1485x+2.53325=0.1485(4.5)+2.53325=0.66825+2.53325=3.2015$$

La velocidad aproximada de la partícula es 3.2015 m/s a los 4.5 segundos.
Seguramente te preguntarás qué podemos hacer con la ecuación obtenida: podemos conocer la velocidad en cualquier instante del intervalo analizado, también se puede predecir la velocidad de la partícula en los instantes más próximos a diez, porque no podemos extender mucho nuestra predicción en virtud de que la correlación es buena, pero no muy próxima a 1.
Ahora con uso del cálculo que estas por empezar a conocer podemos conocer la ecuación de posición de nuestra partícula y la ecuación de aceleración para determinar cómo es el movimiento de la misma; en este caso nuestra partícula se desplaza con aceleración constante.

ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes ejercicios encontrando los modelos matemáticos que representan las series de puntos y determinando si el modelo encontrado representa una interpretación del fenómeno o si no hay una suficiente correlación; grafica la recta obtenida.

1) En un experimento de laboratorio se hacen pruebas de un resorte a tensión, colocándole distintos pesos para ver cuál es la magnitud de la deformación; construye el modelo matemático que representa la deformación (cm) en función del peso aplicado (N)

x	*y*
0	50
10	62
20	72
30	86
40	98
50	106
60	121
70	133
80	143
90	155

2) Durante los últimos años los investigadores han observado el aumento del nivel del mar. Construye un modelo matemático que permita determinar el nivel del mar en 2010.

t (periodo en años)	*h* (cambio en el nivel del mar) mm
1870	0
1890	22
1910	48
1930	55
1950	100
1970	125
1990	152

Fuente: NASA

3) En el estudio del calentamiento global se ha observado la concentración de dióxido de carbono en función del tiempo; construye un modelo matemático que te permita conocer la concentración aproximada de dióxido de carbono (ppm = partes por millón) en el año 2012.

x (año)	*y* (ppm)
2005	378
2006	380.9
2007	382.5

2008	385
2009	386.5
2010	388

Fuente: NASA

SECCIÓN: PREPÁRATE PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD Y PARA EL EXAMEN DE ENLACE

Individualmente resuelve este bloque de problemas, comenta con un compañero tus respuestas y preséntenlas al resto del grupo, pidan a su maestro que les resuelva sus dudas. Este tipo de ejercicios es útil para ejercitar la memoria.

1. Realiza en el menor tiempo posible la suma de todos los números del uno al cien, procura hacerla mentalmente, utilizando la menor cantidad de anotaciones posibles (existe una ecuación matemática, sólo úsala para comprobar tu resultado).

2. Representa en forma de factores primos todos los números del uno al cien, esta factorización hazla mentalmente y escribe sólo tu factorización cuando la termines.

Nota. Estos ejercicios, mejoran tu habilidad numérica y si los contestas correctamente también benefician tu memoria a corto plazo, fundamental para el aprendizaje y el almacenamiento de la información en tus procesos mentales.

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

I. Contesta brevemente las siguientes preguntas para ejercitar tu memoria.

1. ¿En qué año se inventó el cálculo?

2. ¿Quién fue el inventor del cálculo?

3. ¿Qué aportación hizo al cálculo Riemann?

4. ¿Quién inventó el plano cartesiano y en qué se basó para diseñarlo?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

II. Construye el modelo matemático de los siguientes relojes de arena, supón que están vacíos y que los vas a llenar con agua, con un gasto constante:

III. Construye un modelo matemático para el siguiente caso:
Evolución de la población urbana y rural de México, de 1950 a 2005 y realiza una proyección para los años 2010 y 2012.

t (años)	Población urbana (millones de habitantes)
1950	11.02
1955	14.39
1960	17.76
1965	23.10
1970	28.43
1975	36.45
1980	44.47
1985	51.34
1990	58.21
1995	67.25
2000	72.98
2005	79.20

FUENTE: CONAGUA. Subdirección General de Programación. Elaborado a partir de:
INEGI. Censos Generales y Conteos de Población y Vivienda.
Instrucción: Con la ayuda de tu docente encuentra y escribe en las siguientes líneas tus áreas de oportunidad, es decir aquellos temas que no recuerdas, que no sabes o que se te dificultan.

IV. Con la ayuda de tu docente encuentra y escribe en las siguientes líneas tus áreas de oportunidad, es decir, aquellos temas que no recuerdas, no conoces o que se te dificultan.